

0 718 079 -/

КАЗАНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

На правах рукописи

ЗАГИДУЛЛИНА Екатерина Валентиновна

**ДИНАМИЧЕСКАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ  
СТЕРЖНЕЙ И ПЛАСТИН**

01.02.04 – механика деформируемого твердого тела

**Автореферат**  
на соискание ученой степени  
кандидата физико-математических наук

Казань - 2000

Работа выполнена на кафедре теоретической механики Казанского государственного университета.

**Научный руководитель:** Доктор физико-математических наук,  
академик РАЕН Ю.Г.Коноплев

**Официальные оппоненты:** Доктор технических наук, профессор  
В.А.Крысько

Доктор технических наук, профессор  
В.И.Митряйкин

**Ведущая организация:** Казанский государственный  
технологический университет

Защита состоится 12 октября 2000 г. в 14 ч. 30 мин. в ауд. физ. 2 на заседании диссертационного Совета Д053.29.01 по защите диссертаций на соискание ученой степени доктора физико-математических наук по механике при Казанском государственном университете по адресу: 420008, г. Казань, ул. Кремлевская, 18.

С диссертацией можно ознакомиться в научной библиотеке КГУ им. Н.И. Лобачевского.

Автореферат разослан « 5 » 09 2000 г.

Ученый секретарь  
диссертационного Совета,  
кандидат физико-математических наук,  
доцент



НАУЧНАЯ БИБЛИОТЕКА  
КФУ



0000947986

А.А.Саченков

*Актуальность темы.*

Исследование поведения конструкций при динамическом нагружении весьма актуально для развития машиностроения и самолетостроения. Ракетная техника также заинтересована в интенсивных исследованиях этого класса задач.

Реальные машиностроительные конструкции состоят из набора пластин, оболочек и пологих оболочечных участков, имеющих всевозможные вырезы и отверстия. Форма и число вырезов существенно сказываются на выборе метода исследования. Направление, объединяющее в настоящее время наибольшую группу публикаций, связано с изучением устойчивости пластин и оболочек с вырезами, контур которых соответствует внешнему контуру пластинки или оболочки. Задачам устойчивости конструкций с вырезами произвольных форм уделено в литературе значительно меньше внимания.

Теория динамической устойчивости развивалась по нескольким направлениям. Первое направление - математически строгое решение задач динамики с учетом геометрической и физической нелинейности, то есть больших перемещений конструкции и упругопластического деформирования материала. Второе направление - решение задач на основе линеаризованных уравнений движения. При решении применяются как методы классической теории устойчивости, связанные с идеализацией свойств материала и внешних воздействий, так и различные аналитические методы: энергетический, теоретико-экспериментальный, метод последовательной минимизации функционала Гамильтона и т.д.

Кроме того, сложность задач о динамическом выпучивании обуславливается еще и отсутствием общего критерия потери устойчивости (подробный обзор по критериям динамической устойчивости сделан в разделе 2.1); крайне редко сопоставляются решения, полученные с использованием различных уравнений.

*Целью работы* является исследование и разработка методик расчета динамической устойчивости искривленных стержней, с использованием различных типов уравнений и критериев динамической устойчивости, и круглых пластин с вырезами неканонических форм различных геометрических параметров, граничных условий и характеристик входной нагрузки.

*Научная новизна работы* состоит в следующем:

- впервые предложено воспользоваться применительно к задачам динамической устойчивости стержней сложной формы методом фиктивной деформации, разработана методика исследования динамической устойчивости искривленных стержней;

- проведен сравнительный анализ решений, полученных с использованием различных типов уравнений и критериев динамической устойчивости;
- разработана методика получения аналитических решений задачи динамической устойчивости круглых пластин с вырезами неканонических форм;
- получены аналитические зависимости между основными динамическими характеристиками;
- произведен анализ влияний геометрических параметров круглых пластин с вырезами неканонических форм, граничных условий и характеристик входной нагрузки на критические характеристики.

*Практическая ценность.* Работа носит теоретический характер. Результаты выполненной работы могут быть использованы для решения задач динамической устойчивости элементов конструкций, применяемых в авиации, ракетостроении, судостроении, строительстве и т.д.

*Структура работы.* Диссертация состоит из введения, трех глав, заключения, списка литературы и содержит 135 страниц текста, 18 рисунков, 11 таблиц. Список литературы включает 151 наименование.

*Достоверность результатов и выводов* диссертации обеспечивается строго обоснованными математическими преобразованиями при выводе теоретических положений, а также соответствием контрольных расчетных результатов известным фактам.

В диссертации получены и *выносятся на защиту* следующие основные положения:

- развитие метода фиктивной деформации на решение задач динамической устойчивости стержней сложной формы, методика исследования динамической устойчивости искривленных стержней;
- сравнительный анализ решений задачи, полученных на основе различных типов уравнений и критериев динамической устойчивости;
- методика получения аналитических решений задачи динамической устойчивости круглых пластин с вырезами неканонических форм, оценка применимости методики;
- аналитические зависимости между основными динамическими характеристиками;
- оценка влияния геометрических параметров, граничных условий и характеристик входной нагрузки на динамическую устойчивость круглых пластин с вырезами неканонических форм.

*Апробация работы.* Основные результаты диссертационной работы докладывались на итоговых научных конференциях Казанского государственного университета (1993-1999 г.г.), на Международной научно-технической конференции в г. Набережные Челны (1995 г.), на XVI военно - технической конференции «Вопросы совершенствования боевого применения и разработок артиллерийского вооружения и военной



техники» в г. Казани (1999 г.), на XIX Международной конференции по теории оболочек и пластин в г. Нижний Новгород (1999 г.), на научных семинарах: на кафедре теоретической механики Казанского государственного университета, в Военном артиллерийском университете (филиал, Казань).

*Публикации.* По теме диссертации имеется 6 публикаций.

## ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

*Во введении* обоснована актуальность исследования, дан краткий обзор публикаций, относящихся к теме диссертации, обсуждается цель диссертационной работы, ее новизна, излагается краткое содержание работы, формулируются основные положения, выносимые на защиту.

*Глава 1* посвящена постановке задачи механики стержней с осевыми линиями, пологими относительно линии отсчета.

*В разделе 1.1* приводятся основные сведения из дифференциальной геометрии относительно плоских кривых и их параметризаций.

*Раздел 1.2.1.* В современных конструкциях широко используются оболочки, у которых срединная поверхность является не параметризованной. Для решения задач параметризации таких поверхностей удобен в применении метод тангенциальной фиктивной деформации поверхности отсчета, предложенный В.Н.Паймушиным.

Если требуется построить параметризацию некоторой поверхности  $\sigma$  заданной геометрической формы, то, в соответствии с данным методом, необходимо подобрать в трехмерном пространстве поверхность  $\sigma_0$ , параметризованную гауссовыми координатами  $\alpha^1, \alpha^2$ , расположить ее соответствующим образом относительно  $\sigma$  и подвергнуть последующей фиктивной деформации, сводящейся к построению трех двумерных функций  $F_1, F_2$  и  $H$ :

$$\bar{r}(\alpha^i) = \bar{r}^0(\alpha^i) + F^i \bar{r}_i^0 + H \bar{m}^0,$$

$\bar{r}_i^0, \bar{m}^0$  - базисные векторы на  $\sigma_0$ .

*В разделе 1.2.2* предложено развить описанный метод на решение задач стержней сложного вида, у которых осевая линия не задана аналитическим уравнением.

Пусть  $\bar{r}_0$  - линия отсчета – аналитически заданная линия.

Здесь  $s_0$  - ее натуральный параметр.

$\bar{\tau}_0$  - единичный касательный вектор к линии отсчета  $C_0$ .

Введем в рассмотрение линию отсчета  $C_0$  таким образом, чтобы прямая, проведенная по направлению нормали  $\bar{\nu}^0$  к  $C_0$ , пересекала

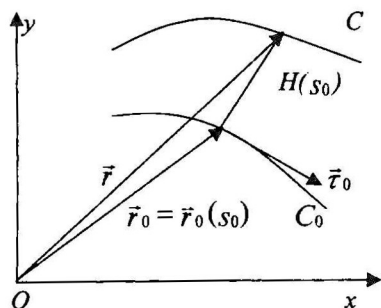


Рис. 1

искомую линию  $C$  не более одного раза. Тогда для произвольной точки на  $C$  (рис. 1) имеем:

$$\vec{r}(s_0) = \vec{r}_0(s_0) + H(s_0)\vec{\tau}_0.$$

Используя известные формулы из дифференциальной геометрии, получим для кривизны  $k$  следующее выражение:

$$k = \frac{A^2 k_0 + (1 - H k_0) \frac{d^2 H}{d s_0^2} + H_{s_0} \frac{d}{d s_0} (H k_0)}{A^3}, \quad (1)$$

$$\text{где } A = \sqrt{(1 - H k_0)^2 + H_{s_0}^2}, \quad H_{s_0} = \frac{dH}{d s_0}.$$

В разделе 1.2.3 вводится понятие пологости стержня относительно линии отсчета.

Пусть  $H = H_0 = \text{const}$ , тогда из (1) следует, что

$$A = 1 - H k_0, \quad ds = (1 - H k_0) d s_0. \quad (2)$$

Рассмотрим теперь условия, при выполнении которых приближенно будут иметь место формулы (2). Очевидно, что для этого должны выполняться оценки:

$$a) \quad \frac{dH}{d s_0} \sim \sqrt{\varepsilon}, \quad (3)$$

где  $\varepsilon$  - некоторая малая величина, которой можно пренебречь по сравнению с единицей, т. е.  $1 + \varepsilon \approx 1$ .

Упрощения, возможные в формулах (1) при выполнении (3), несущественны:

$$A = \sqrt{(1 - H k_0)^2 + \varepsilon} \approx 1 - H k_0, \quad (4)$$

$$k \approx \frac{(1 - H k_0)^2 k_0 + (1 - H k_0) \frac{d^2 H}{d s_0^2} + H_{s_0} \frac{d}{d s_0} (H k_0)}{(1 - H k_0)^3}.$$

Пусть имеет место как оценка (а), так и приведенная ниже оценка (b):

$$b) \quad (1 - H k_0) \sim 1. \quad (5)$$

Тогда

$$A \approx 1, \quad (6)$$

$$k \approx k_0 + \frac{d^2 H}{d s_0^2} + H s_0 \frac{d}{d s_0} (H k_0).$$

Совокупность ограничений (а) и (b), накладываемых на функцию  $H$ , позволяет считать первую метрическую форму линии  $C$ , совпадающей с первой метрической формой линии  $C_0$ . Оценка (а) является условием, при котором стержень можно считать пологим относительно линии отсчета. Дополнительное к условию (а), условие (b) позволяет существенно упростить формулы (1), а следовательно, и уравнения, описывающие механику деформирования стержней.

Оценка (с). Пусть линия отсчета  $C_0$  - прямая линия. Тогда кривизна линии отсчета  $k_0 = 0$ . Для стержней, пологих относительно прямой линии ( $ds = dx$ ), будет справедлива формула

$$k \approx \frac{d^2 H}{dx^2}, \quad (7)$$

где  $x$  - координата прямой линии отсчета.

Раздел 1.3 посвящен выводу нелинейных уравнений динамики стержня из общих соотношений нелинейной теории упругости.

При выводе разрешающей системы уравнений движения стержня используется гипотеза плоских сечений.

Возьмем элемент стержня длиной  $ds$  в некотором деформированном состоянии в лагранжевой системе координат (рис.2).

Уравнения движения стержня следуют из теоремы о движении центра масс для выделенного элемента

$$\rho F d\bar{s} \hat{a} = \bar{Q}(\bar{s} + d\bar{s}) - \bar{Q}(\bar{s}) + \bar{q}(\bar{s}) d\bar{s} \quad (8)$$

( $\hat{a}$  - ускорение),

а также из теоремы об изменении момента количества движения

$$\rho d\bar{s} J \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = M(\bar{s} + d\bar{s}) - M(\bar{s}) + m(\bar{s}) d\bar{s} +$$

$$+ [\bar{p}(\bar{s} + d\bar{s}) - \bar{p}(\bar{s})] \times \bar{Q}(\bar{s} + d\bar{s}) \bar{p}, \quad (9)$$

где  $\varphi$  - угол поворота сечения.

Поскольку  $d\bar{s}$  бесконечно малый элемент, то, разложив уравнения в ряд Тейлора по  $d\bar{s}$  и ограничившись линейной частью, получим

$$\rho F \hat{a} = \frac{\partial \bar{Q}}{\partial \bar{s}} + \bar{q}(\bar{s}),$$

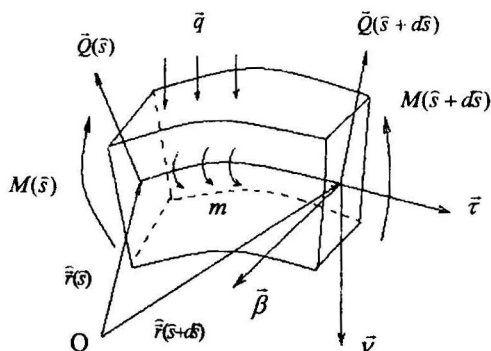


Рис.2.

$$\rho J \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = \frac{\partial M}{\partial \bar{s}} + m + [\hat{\tau} \times \bar{Q}]_{\hat{\beta}}.$$

Эти уравнения динамики искривленного стержня в проекциях на оси деформированного состояния для плоского случая имеют вид

$$\hat{\tau}: \quad \rho F a_{\hat{\tau}} = \frac{\partial Q_{\hat{\tau}}}{\partial \bar{s}} - \hat{k} Q_{\hat{v}} + q_{\hat{\tau}}, \quad (10)$$

$$\hat{v}: \quad \rho F a_{\hat{v}} = \frac{\partial Q_{\hat{v}}}{\partial \bar{s}} + \hat{k} Q_{\hat{\tau}} + q_{\hat{v}}, \quad (11)$$

$$\hat{\beta}: \quad \rho J \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = \frac{\partial M}{\partial \bar{s}} + m + Q_{\hat{v}}, \quad (12)$$

где  $\hat{k}$  - кривизна осевой линии в деформированном состоянии.

К уравнениям движения необходимо добавить физические соотношения

$$Q_{\hat{\tau}} = F E \varepsilon_{11}, \quad (13)$$

В разделе 1.4 дается общая постановка задачи о нелинейной динамике стержня, учитывающая конечные деформации осевой линии.

Деформация упругой линии  $\varepsilon$  и кривизна  $\hat{k}$  после деформации выражаются через компоненты вектора перемещений  $\vec{u} = u\vec{\tau} + w\vec{\nu}$  по формулам:

$$\sqrt{1+2\varepsilon}\vec{\tau} = (1+u'-wk)\vec{\tau} + (w'+uk)\vec{\nu}, \quad (15)$$

$$\begin{aligned} \hat{k}\vec{\nu} = & ((u''-uk^2-2kw'-wk')\vec{\tau} + \\ & + (w''-wk^2+2ku'+uk'+k)\vec{\nu}) / ((1+u'-wk)^2 + \\ & + (w'+uk)^2) + ((1+u'-wk)(u''-w'k-k'w) + \\ & + (w'+uk)(w''+u'k+k'u))((1+u'-wk)\vec{\tau} + \\ & + (w'+uk)\vec{\nu}) / ((1+u'-wk)^2 + (w'+uk)^2)^2, \end{aligned} \quad (16)$$

где  $u' = \frac{\partial u}{\partial s}$ ,  $w' = \frac{\partial w}{\partial s}$ ,  $u'' = \frac{\partial^2 u}{\partial s^2}$ ,  $w'' = \frac{\partial^2 w}{\partial s^2}$ ,  $k' = \frac{dk}{ds}$ ,

$k$  - кривизна осевой линии в недеформированном состоянии.

Для кривизны стержня с пологой относительно линии отсчета осевой линией будут иметь место формулы (4), (6), (7) в зависимости от рассматриваемого случая.

Если считать, что деформации малы, то при среднем изгибе для  $\varepsilon$  можно записать выражение

$$\varepsilon = u' - wk + \frac{1}{2}\omega^2, \quad (17)$$

$$\text{где } \omega = w' + uk.$$

Если стержень пологий, тогда

$$\varepsilon = u' - wk + \frac{1}{2}w'^2. \quad (18)$$

Если кривизна  $k=0$ , то из (17) будем иметь

$$\varepsilon = u' + \frac{1}{2}w'^2. \quad (19)$$

Выражение кривизны (16) при среднем изгибе

$$\hat{k} = k + \omega'. \quad (20)$$

Для пологого стержня

$$\hat{k} = k + w''. \quad (21)$$

Если кривизна  $k=0$ , тогда из (20) получим

$$\hat{k} = w''. \quad (22)$$

При использовании выведенных уравнений (с учетом упрощающих предположений  $m=0$ ,  $q_\tau = q_v = 0$ ), когда инерция вращения не учитывается, можно получить уравнения движения стержня, пологого относительно прямой линии отсчета в постановках Т.Кармана, В.В.Болотина, А.С.Вольмира.

Например, в случае шарнирно опертого стержня при продольном ударе при малых деформациях и среднем изгибе получим уравнение в форме Кармана:

$$\rho F \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = -JE \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \left( \int_L^x \rho F \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} dx + P(t) \right) \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + k \right). \quad (23)$$

Если считать стержень несжимаемым, то из (23) с учетом краевых условий следует:

$$u = \int_0^x \left( wk - \frac{1}{2} w'^2 \right) dx. \quad (24)$$

В главе 2 на основе выведенных уравнений динамики рассмотрена задача динамической устойчивости искривленного стержня. Оценено влияние на критические параметры стержня скорости нагружения, начальных скоростных характеристик, искривления осевой линии в случаях нагрузок, меняющихся по линейному закону во времени. Проведено сравнение критических параметров искривленного стержня, полученных с использованием уравнений типа Кармана и типа Болотина.

Раздел 2.1 посвящен анализу критериев динамической устойчивости, применяемых в механике тонкостенных конструкций.

Известно, что для исследования задачи устойчивости типовых элементов конструкции при действии на них динамических нагрузок необходимо решать нелинейные уравнения динамики при соответствующих начальных и краевых условиях. В результате решения задачи в такой постановке получают зависимости перемещений тех или иных характерных точек от времени.

Физическая сторона исследуемого объекта. На первом этапе нагружения силы инерции сопротивляются внешней нагрузке и конструкция испытывает колебательные движения, т.е. первый участок графика зависимости перемещений от времени (ГЗПВ) характеризуется малыми колебаниями вокруг устойчивого начального положения равновесия. Затем силы инерции, пройдя через нуль и сменив знак, начинают помогать внешним силам. При этом, очевидно, меняет знак и ускорение, а это приводит к тому, что в некоторый момент скорость конструкции обращается в нуль, конструкция как бы притормаживается. На втором участке ГЗПВ реализуется процесс динамического перехода путем прощелкивания к новому состоянию, вокруг которого система совершает нелинейные колебания.

Если в задачах статики к настоящему моменту установились вполне определенные понятия о верхней и нижней критических нагрузках, то в динамике этот вопрос решается различными авторами по разному. К настоящему времени существует большое число подходов к проблеме динамической устойчивости: А.В.Саченкова, А.С.Вольмира,

В.М.Даревского, И.Я.Амиро, В.А.Крысько, А.С.Черевацкого и многих других.

В разделах 2.2, 2.3 представлена методика исследования динамической устойчивости искривленных стержней.

В разделе 2.2 дается постановка задачи о динамической устойчивости искривленного стержня длины  $L$  при продольной динамической нагрузке. Рассматривается класс стержней пологих относительно прямой линии отсчета. Граничные условия – шарнирное опирание. Исходные уравнения – типа Кармана.

В разделе 2.3 излагается решение сформулированной задачи. В качестве функции формы выбирается  $\sin \frac{\pi x}{L}$ . Для решения используется

метод Бубнова - Галеркина. После его применения приходим к системе из трех обыкновенных нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка относительно функций  $w_1, w_2, w_3$ . Аналитические преобразования проводились в пакете Mathematica 3.0. Система дифференциальных уравнений обезразмеривалась. Полученную в результате обезразмеривания систему привели с помощью замены к нормальной системе дифференциальных уравнений первого порядка. Система из трех уравнений второго порядка записана в виде системы из шести дифференциальных уравнений первого порядка. Для ее решения использован метод Рунге – Кутты четвертого порядка.

В разделах 2.4 - 2.7 делается сравнительный анализ решений задачи, полученных на основе различных типов уравнений и критериев динамической устойчивости.

Раздел 2.4 посвящен исследованию влияния скорости нагружения на критические параметры конструкции. Для линейной во времени нагрузки при различных скоростях нагружения определены критические характеристики при помощи двух критериев устойчивости, один из которых соответствует началу второго этапа ГЗПВ (критерий Вольмира), другой – концу (критерий Саченкова). Исходя из анализа представленных результатов, сформулирован вывод, который оказался весьма интересным:

- при увеличении скорости нагружения «размываются границы» между различными критериями устойчивости.

Раздел 2.5. Сравнение решений, полученных в рамках постановок типа Кармана и типа Болотина.

На рисунках 3, 4 сопоставляются кривые, полученные в результате решения задачи динамической устойчивости на основе двух типов уравнений. На рисунках кривая  $K$  отвечает модели Кармана,  $B$  – модели Болотина.

Из анализа полученных результатов можно сделать следующие выводы:

1. Для небольших скоростей нагружения наблюдается хорошее совпадение результатов на первом и втором этапах ГЗПВ. Некоторые несущественные расхождения имеют место в закритической области. Временные характеристики совпадают.

2. Для высоких скоростей нагружения уравнение в форме Кармана дает большие значения прогибов, если определять критические характеристики согласно критерию Саченкова. Однако, разница между сравниваемыми результатами несущественна. Временные характеристики совпадают.

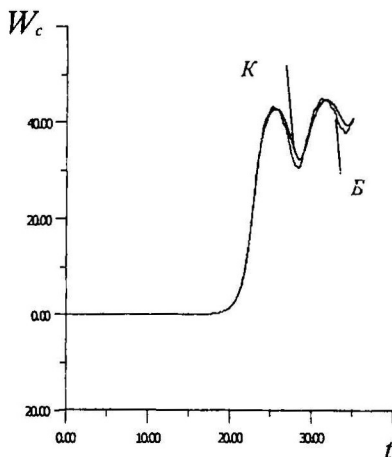


Рис. 3:  $P = 0.1 t$ .

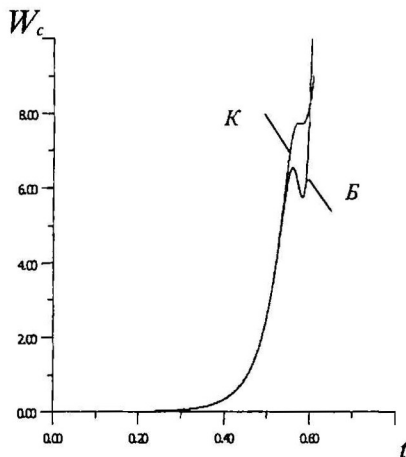


Рис. 4:  $P = 1000 t$ .

### Раздел 2.6. Динамическое поведение стержней с искривленной осью.

Теоретические исследования влияния начальных неправильностей на динамическое поведение конструкции развиваются в двух направлениях. Первое направление – детерминистское, основывается на том, что амплитуда и форма начальных геометрических неправильностей известны для каждого конкретного случая. Второе направление – предполагается, что начальные возмущения образуют случайное поле.

Решена следующая задача. В начальный момент времени  $t = 0$  параметры, характеризующие начальную кривизну, варьируются в пределах  $u_1 = 0,05 \div 5 \cdot 10^{-10}$ ,  $u_2 = 0$ ,  $u_3 = 0$ ,  $\dot{u}_1 = 0$ ,  $\dot{u}_2 = 0$ ,  $\dot{u}_3 = 0$  (рис. 5).

$W_c$  – максимальный прогиб в середине пролета.

Выводы:

1. Любые начальные отклонения влияют на результат и при вычислениях их необходимо учитывать, если нас интересует высокая точность результатов.



2. С увеличением начальных неправильностей в виде начальных кривизн критические характеристики уменьшаются.

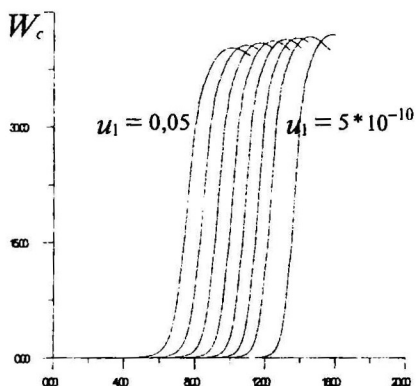


Рис.5:  $P = t$ .

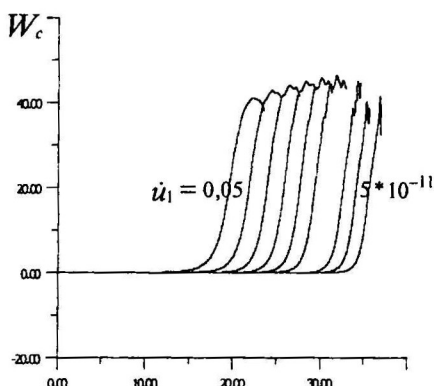


Рис. 6:  $P = 0.1 t$

**Раздел 2.7.** Изучено влияние начальных скоростных характеристик стержня на его процесс динамического деформирования. Начальная скорость может существовать, если упругая система до приложения динамической нагрузки колебалась около исходного состояния равновесия.

Числовые результаты задачи получены при изменении параметра  $\dot{u}_1$  в пределах:  $u_1 = 0$ ,  $u_2 = 0$ ,  $u_3 = 0$ ,  $\dot{u}_1 = 0,05 \div 5 \cdot 10^{-11}$ ,  $\dot{u}_2 = 0$ ,  $\dot{u}_3 = 0$  (рис. 6).

Из полученных результатов сформулированы следующие выводы:

1. С уменьшением начальных скоростных отклонений разница между различными критериями устойчивости падает.
2. С увеличением начальных неправильностей в виде начальных скоростей критические характеристики уменьшаются.

В главе 3 решаются задачи динамической устойчивости круглых пластин с вырезами неканонических форм. Разработана методика получения их аналитических решений. Произведен анализ влияний геометрических параметров этих пластин, граничных условий и характеристик входной нагрузки на критические характеристики.

**Раздел 3.1** посвящен описанию методики интегрирования по времени уравнений возмущенного движения, предложенной А.В.Саченковым и Ю.Г.Коноплевым. Данная методика была развита Ю.Г.Коноплевым и Ф.Х.Тазюковым. Используя для определения критического времени  $t_{kp}$  критерий Саченкова, интегрирование по времени уравнений движения проводится с использованием процедуры

В.З.Власова, в результате получаются уравнения, которые зависят лишь от пространственных координат.

В разделе 3.2 уравнение движения Брайена для кольцевых пластин, имеющих внешний  $r_1$  и внутренний  $r_0$  радиусы, под действием равномерно распределенных радиальных динамических нагрузок, изменяющихся по линейному закону, модифицированы для случая круглых пластин с вырезами неканонических форм, имеющих внешний радиус  $r_1$  и внутренний радиус  $r_0(\theta)$  с помощью замены

$$r = \varepsilon r_1 \varphi(\theta) + \rho, \quad (25)$$

где  $\varepsilon$  - малая величина, которой можно пренебречь по сравнению с единицей.

В разделе 3.3 решена задача динамической устойчивости круглой пластины с вырезом неканонической формы в случае, когда нагрузка приложена к вырезу. Граничные условия - шарнирное опирание.

Определяя радиальное, кольцевое и касательное напряжения  $\sigma_r, \sigma_\theta, \tau_{r\theta}$  из плоской задачи упругости, для рассматриваемого случая получили

$$\sigma_r = -\frac{P(\varepsilon\varphi(\theta)+l)^2}{2h(1-l)(1+l+2\varepsilon\varphi(\theta))} \left[ 1 - \frac{(\varepsilon\varphi(\theta)+l)^2}{(\varepsilon\varphi(\theta)+\tilde{\rho})^2} \right], \left( 1 - \frac{(\varepsilon\varphi(\theta)+l)^2}{(\varepsilon\varphi(\theta)+\tilde{\rho})^2} \leq 0 \right), \quad (26)$$

$$\sigma_\theta = -\frac{P(\varepsilon\varphi(\theta)+l)^2}{2h(1-l)(1+l+2\varepsilon\varphi(\theta))} \left[ 1 + \frac{(\varepsilon\varphi(\theta)+l)^2}{(\varepsilon\varphi(\theta)+\tilde{\rho})^2} \right], \quad \tau_{r\theta} = 0,$$

где  $\tilde{\rho} = \frac{\rho}{r_1}$  - безразмерная координата,  $l = \frac{R_0}{r_1}$  - параметр ширины пластины ( $0 \leq l \leq 1$ ).

Переписывая модифицированное уравнение в безразмерном виде и полагая  $\varphi(\theta) = \cos \theta$  (рис.7), полученное уравнение проинтегрировано по Бубнову. Подынтегральное выражение преобразовано с помощью биномиального разложения, пренебрегая членами  $O^4$  порядка малости. В результате задача становится одномерной. Отсюда, введя замену независимой переменной и соответствующую граничным условиям аппроксимирующую функцию, пришли к разрешающему уравнению:

$$f = -L(A_1(m,n) + \varepsilon^2 A_2(m,n)) + B_1(m,n) + \varepsilon^2 B_2(m,n) + \frac{I_0^2}{L^2} C(m,n) = 0, \quad (27)$$

$$\text{где } A_1(m,n) = \frac{(-k^2 - m_1^2 + 2k + n^2 + 2)(1 - l^{2(k-1)})}{4(k-1)((k-1)^2 + m_1^2)} -$$

$$\frac{(k^4 - k^3 - m_1^4 + m_1^2 k - n^2 k^2 - n^2 m_1^2 - 2m_1^2 k^2 + n^2 k)(1 - l^{2k})}{4(k^2 + m_1^2)m_1^2 k},$$

$$A_2(m,n) = \frac{(0.5k^2 - 0.5m_1^2 - 2k + 2n^2 - 3)(1 - l^{2(k-1)})}{4(k-1)((k-1)^2 + m_1^2)} +$$

$$+ \frac{(0.5k^2 - 0.5m_1^2 + 5n^2 - 9)(1 - l^{2(k-2)})}{4(k-2)((k-2)^2 + m_1^2)} +$$

$$+ \frac{2(2k^2 + 2m_1^2 - 4n^2 - 6k + 15)(1 - l^{2(k-3)})}{(2k-3)((2k-3)^2 + 4m_1^2)},$$

$$B_1(m,n) = (-3k^4 - 2m_1^2k^2 + m_1^4 + 12k^3 - 16k^2 + 4m_1^2k + 2n^2m_1^2 + n^4 +$$

$$+ 2n^2k^2 + 8k - 4kn^2) \frac{(1 - l^{2(k-1)})}{4(k-1)((k-1)^2 + m_1^2)},$$

$$B_2(m,n) = (3n^2m_1^2 + 2.5m_1^2 - 11n^2 + 5n^4 - 2m_1^2k - 3k^2n^2 - 0.5k^2 -$$

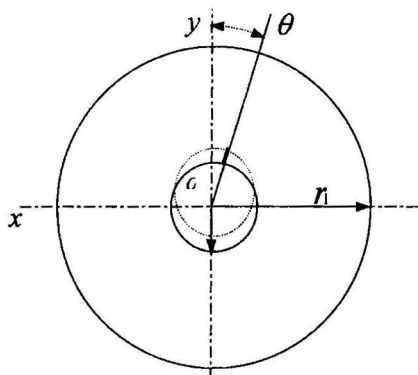


Рис.7

$$- 2k^3 + 4k + 13) \frac{(1 - l^{2(k-2)})}{4(k-2)((k-2)^2 + m_1^2)},$$

$$C(m,n) = \frac{1 - l^{2(k+1)}}{(k^2 + m_1^2 + 2k + 1)(k + 1)},$$

$$L_0^2 = \frac{p_0^2 672,8 \bar{\rho} h (\varepsilon \varphi + l)^4 r_1^8}{D^3 (1-l)^2 (1+l+2\varepsilon \varphi)^2} -$$

безразмерная скорость  
нагружения,

$$L = \frac{P r_1^2 (\varepsilon \varphi(\theta) + l)^2}{D(1-l)(1+l+2\varepsilon \varphi(\theta))} -$$

характеристический коэффициент  
нагрузки.

В разделе 3.4 рассмотрен случай  $\varepsilon = 0$ . Он соответствует случаю кольцевой пластины. Нагрузка приложена к вырезу, граничные условия - шарнирное опирание. Критические параметры определены с помощью перебора волновых чисел  $m$  и  $n$ . Решения задачи представлены в виде графиков и таблиц. Некоторые выводы из полученных решений:

1. Потеря устойчивости при сжатии происходит по осесимметричной форме, при растяжении - по несимметричной.
2. Волновое число  $n$  увеличивается при уменьшении ширины пластины и увеличении скорости нагружения.
3. Критическая нагрузка зависит от ширины пластины. Существует минимум, который при уменьшении скорости нагружения сдвигается в сторону увеличения параметра ширины пластины  $l$ .
4. Отношение критической нагрузки при сжатии к нагрузке при растяжении зависит от ширины пластины.
5. При  $\varepsilon \neq 0$  имеет место тенденция увеличения критических характеристик для широких пластин. Для  $\varepsilon = 0.05$  это увеличение

порядка 1-3 % в зависимости от динамического процесса. Для узких пластин наоборот – снижение критических характеристик, но менее существенное и лишь при больших скоростях нагружения (табл.1).

*Примечание.* В силу симметрии функции  $\varphi(\theta) = \cos \theta$  рассматриваемые пластины ( $\varepsilon = 0.05$  и  $\varepsilon = 0$ ) сопоставимы, т. к. имеют одинаковые площади, а следовательно, и одинаковые массы. Поскольку рассматриваются динамические процессы, масса объекта характеристика существенная.

	$L_0$	$-P^{kp} \left( P^{kp} = P_0^{kp} \frac{D}{r_1^2} \right)$		$n$	$m$	Различие в %
		$\varepsilon = 0,05$	$\varepsilon = 0$			
$l=0,2$	0	92,2	91,77	0	1	0,5
	100	276,1	268,2	0	1	3
	1000	1153,0	1114,1	0	1	3,4
	10000	5235,7	5055,87	0	1	3,4
$l=0,5$	0	120,69	120,69	0	1	0
	100	122,17	122,17	0	1	0
	1000	185,0	185,1	0	1	-0,05
	10000	646,4	647,33	0	1	-0,14

Табл. 1

В разделе 3.5 решена задача динамической устойчивости круглой пластины с вырезом неканонической формы  $\varphi(\theta) = \cos \theta$  в случае нагрузки приложенной к внешнему контуру. Граничные условия - шарнирное опирание.

Радиальное, кольцевое и касательное напряжения получены в виде

$$\sigma_r = \frac{P(\varepsilon\varphi(\theta)+1)^2}{2h(1-l)(1+l+2\varepsilon\varphi(\theta))} \left[ 1 - \frac{(\varepsilon\varphi(\theta)+l)^2}{(\varepsilon\varphi(\theta)+\tilde{\rho})^2} \right],$$

$$\sigma_\theta = \frac{P(\varepsilon\varphi(\theta)+1)^2}{2h(1-l)(1+l+2\varepsilon\varphi(\theta))} \left[ 1 + \frac{(\varepsilon\varphi(\theta)+l)^2}{(\varepsilon\varphi(\theta)+\tilde{\rho})^2} \right], \quad \tau_{r\theta} = 0, \quad (28)$$

где  $P$  – равномерно распределенная по внешнему контуру растягивающая нагрузка, отнесенная к единице длины.

Рассуждая аналогичным образом (раздел 3.3), получено уравнение

$$f = \bar{L}(\bar{A}_1(m,n) + \varepsilon^2 \bar{A}_2(m,n)) + B_1(m,n) + \varepsilon^2 B_2(m,n) + \frac{\bar{L}_0^2}{\bar{L}^2} C(m,n) = 0. \quad (29)$$

Полиномы  $\bar{A}_1(m,n)$ ,  $\bar{A}_2(m,n)$  имеют структуру подобную (27).

Безразмерная скорость нагружения в данном случае

$$\bar{L}_0^2 = \frac{p_0^2 672,8 \bar{\rho} h (\varepsilon \varphi + 1)^4 r_1^8}{D^3 (1-l)^2 (1+l+2\varepsilon \varphi)^2}.$$

Безразмерные скорости нагружения в данной задаче и в задаче раздела 3.3 связаны следующим равенством  $L_0^2 = \bar{L}_0^2 \frac{(\varepsilon \varphi + 1)^4}{(\varepsilon \varphi + 1)^4}$ .

Характеристический коэффициент нагрузки  $\bar{L} = \frac{P r_1^2 (\varepsilon \varphi(\theta) + 1)^2}{D(1-l)(1+l+2\varepsilon \varphi(\theta))}$ .

Связь между характеристическим коэффициентом нагрузки данной задачи и задачи раздела 3.3 имеет вид  $L = \bar{L} \frac{(\varepsilon \varphi(\theta) + 1)^2}{(\varepsilon \varphi(\theta) + 1)^2}$ .

В разделе 3.6 рассмотрен случай  $\varepsilon = 0$ . Он соответствует случаю кольцевой пластины. Нагрузка приложена к внешнему контуру. Граничные условия - шарнирное опирание.

Критические параметры определены с помощью перебора волновых чисел  $m$  и  $n$ . Решения задачи представлены в виде графиков и таблиц. Выводы из представленных решений:

1. Если превалирующими являются радиальные напряжения  $\sigma_r$ , то устойчивость теряется по не осесимметричному закону. Если превалируют кольцевые напряжения  $\sigma_\theta$ , то – по осесимметричному закону. Иначе говоря, осесимметричная задача переходит в неосесимметричную при уменьшении ширины пластины.
2. При увеличении скорости нагружения волновое число  $n$  увеличивается.
3. Критическая нагрузка зависит от ширины пластины, причем  $\min$  критический нагрузки сдвигается в сторону увеличения параметра ширины пластины  $l$ .

В разделе 3.7 решена задача динамической устойчивости круглой пластины. Рассмотрен случай, когда нагрузка приложена к вырезу неканонической формы  $\varphi(\theta) = \cos \theta$ , граничные условия – жесткая заделка.

По представленной методике,  $\sigma_r, \sigma_\theta, \tau_{r\theta}$  получены в виде (26). Используя аппроксимирующую функцию, соответствующую данным граничным условиям, разрешающее уравнение переписывается как

$$f = -L(\tilde{A}_1(m, n) + \varepsilon^2 \tilde{A}_2(m, n)) + \tilde{B}_1(m, n) + \varepsilon^2 \tilde{B}_2(m, n) + \frac{L_0^2}{L^2} \tilde{C}(m, n) = 0. \quad (30)$$

Полиномы  $\tilde{A}_1(m, n)$ ,  $\tilde{A}_2(m, n)$ ,  $\tilde{B}_1(m, n)$ ,  $\tilde{B}_2(m, n)$ ,  $\tilde{C}(m, n)$  имеют структуру подобную (27).

*Раздел 3.8.* Случай кольцевой пластины. Нагрузка приложена к вырезу. Граничные условия - жесткая заделка.

Критические параметры определены с помощью перебора волновых чисел  $m$  и  $n$ . Решения задачи представлены в виде графиков и таблиц.

Качественная картина решений сохраняется аналогичной случаю шарнирного опирания, количественная – критические характеристики увеличиваются.

В разделе 3.9 рассмотрена задача динамической устойчивости круглой пластины с вырезом неканонической формы, к внешнему контуру которой приложена радиальная растягивающая нагрузка, отнесенная к единице длины. Граничные условия – жесткая заделка.

$\sigma_r, \sigma_\theta, \tau_{r\theta}$  будут иметь вид (28). Используя аппроксимирующую функцию, соответствующую данным граничным условиям, получено разрешающее уравнение

$$f = \bar{L}(\tilde{A}_1(m, n) + \varepsilon^2 \tilde{A}_2(m, n)) + \tilde{B}_1(m, n) + \varepsilon^2 \tilde{B}_2(m, n) + \frac{\bar{L}_0^2}{\bar{L}^2} \tilde{C}(m, n) = 0. \quad (31)$$

Полиномы  $\tilde{A}_1(m, n)$ ,  $\tilde{A}_2(m, n)$  имеют структуру подобную (27).

*Раздел 3.10.* Случай кольцевой пластины. Нагрузка приложена к внешнему контуру. Жесткая заделка.

Критические параметры определены с помощью перебора волновых чисел  $m$  и  $n$ . Решения задачи представлены в виде графиков и таблиц.

Качественная картина решений сохраняется аналогичной случаю шарнирного опирания, количественная – критические характеристики увеличиваются.

## ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ И ВЫВОДЫ

- Впервые предложено воспользоваться, применительно к задачам динамической устойчивости стержней сложной формы, методом фиктивной деформации. Разработана методика исследования динамической устойчивости искривленных стержней на основе построенных разрешающих нелинейных уравнений динамики.
- Исследовано влияние на критические параметры стержня скорости нагружения, начальных скоростных характеристик и начального искривления осевой линии, в случае нагрузки, меняющейся по линейному закону во времени. Выявлено, что для подобных нагрузок при увеличении скорости нагружения «размываются границы» между различными критериями устойчивости. Проведено сравнение критических параметров искривленного стержня, полученных с использованием различных типов уравнений, которое показало хорошее совпадение результатов для небольших скоростей нагружения. Для

высоких скоростей нагружения уравнения в форме Кармана дают большие значения прогибов, чем уравнения в форме Болотина.

- Разработана методика получения аналитических решений задачи динамической устойчивости круглых пластин с вырезами неканонических форм. Она позволяет получать решения для двух классов задач: когда размеры отверстий одного порядка с внешними размерами пластины и когда отверстия значительно меньше этих размеров.
- Получены аналитические зависимости между основными динамическими характеристиками.
- Произведен анализ влияний геометрических параметров круглых пластин с вырезами неканонических форм, граничных условий и характеристик входной нагрузки на критические характеристики. Показано, что при  $\varepsilon \neq 0$  имеет место тенденция увеличения критических характеристик для широких пластин. Для  $\varepsilon = 0.05$  увеличение равно 1-3 % в зависимости от динамического процесса. Для узких пластин наоборот – снижение критических характеристик, но менее существенное и лишь при больших скоростях нагружения.

*Основное содержание диссертации опубликовано в работах:*

1. Лобанова Е.В., Тазюков Ф.Х. Устойчивость кольцевых пластин при динамических нагрузках / Казанск. ун-т. - Казань, 1994.- 18с. Деп. в ВИНТИ 16.12.94, № 2914-B94.
2. Лобанова Е.В., Тазюков Ф.Х. Динамическая устойчивость кольцевых пластин // Тезисы докладов Междунар. научно-тех. конф.- Набережные Челны: Изд-во КамПИ, 1995. - с. 98.
3. Мишин В.Н., Загидуллина Е.В. Некоторые задачи динамической устойчивости // Вопросы совершенствования боевого применения и разработок артиллерийского вооружения и военной техники. Сб. тезисов докладов XVI военно - технической конференции.- Казань: Изд-во КФВАУ, 1999.- с. 88.
4. Загидуллина Е.В., Конюхов А.В. Нелинейная динамика криволинейного стержня/ Казанск. ун-т.- Казань, 1999.- 11 с. Деп. в ВИНТИ 28.05. 99, № 1701-B99.
5. Загидуллина Е.В. Обсуждение динамических критериев устойчивости / Казанск. ун-т. - Казань, 1999. - 27 с. – Деп. в ВИНТИ 17.12.99, № 3757-B99.
6. Загидуллина Е.В. Постановка задач механики стержней с осевыми линиями, пологими относительно линии отсчета // Сб. докладов XIX Международной конференции по теории оболочек и пластин.- Нижний Новгород. - 1999. - с. 70-73.



2-00

---

Подписано в печать 10.08.2000 г.  
Заказ 58

Формат 60x90 1/16

Усл. печ. л. 1,25  
Тираж 100

Отпечатано на ризографе в ООО «Велл»  
г. Казань, ул. Свердлова, 9